矩阵的初等变换

林胤榜

同济大学数学科学学院

2023 年 11 月 1 日

主要内容

矩阵的初等变换

先回顾消元法解线性方程组.

例子

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & ④ \end{cases}$$

解.

$$\xrightarrow[①\leftrightarrow②]{③/2} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{③-2①\\④-3①}]{②-2①}\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ -3x_2 + 3x_3 - x_4 = -6 & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{③+5②\\④-3②}]{②\times\frac{-1}{3}}\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ x_2 - x_3 + \frac{1}{3}x_4 = 2 & ② \\ \frac{-4}{3}x_4 = 4 & ③ \\ 3x_4 = -9 & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[④\times\frac{1}{3}]{③\times\frac{-3}{4}}\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=4 & ① \\ x_2-x_3+\dfrac{1}{3}x_4=2 & ② \\ x_4=-3 & ③ \\ x_4=-3 & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{④-③}\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=4 & ① \\ x_2-x_3+\dfrac{1}{3}x_4=2 & ② \\ x_4=-3 & ③ \\ 0=0 & ④ \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x_1 = 7 - 2x_2 + 2x_3 = 4 + x_3 & ① \\ x_2 = x_3 + 3 & ② \\ x_4 = -3 & ③ \end{cases}$ 其中 x_3 可取任意实数.

则

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

总结

操作:

1. $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$
2. $k\textcircled{i}$
3. $\textcircled{i} + k\textcircled{j}$

总结

操作:

1. ⓘ $\leftrightarrow$ ⓙ
2. kⓘ
3. ⓘ $+ k$ⓙ

三个操作均可逆, 不改变方程组的解:

1. 的逆: ⓘ $\leftrightarrow$ ⓙ
2. 的逆: ⓘ $\div k$
3. 的逆: ⓘ $- k$ⓙ.

注意到, 三个操作只改变了系数矩阵和常数矩阵, 并不改变未知数矩阵.

增广矩阵

定义

上述方程组的增广矩阵是指

$$B = (A \quad b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

增广矩阵将会为讨论问题带来便利.

初等行 (列) 变换

上述三个对方程组的操作对应于以下矩阵的操作.

定义

矩阵的**初等行变换**是指以下操作:

1. 对换两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ (r=row);
2. 数乘某行, 记作 $r_i \times k$, $k \neq 0$;
3. 将一行的倍数加到另一行, 记作 $r_i + kr_j$.

类似定义**初等列变换**, 以 c 代表列. 它们统称为**初等变换**.

初等行 (列) 变换均可逆.

定义

1. 若矩阵 A 经过有限次初等行变换后可变成 B, 称 A 与 B 行等价, 记作 $A \overset{r}{\sim} B$
2. 若矩阵 A 经过有限次初等列变换后可变成 B, 称 A 与 B 列等价, 记作 $A \overset{c}{\sim} B$;
3. 若矩阵 A 经过有限次初等变换后可变成 B, 称 A 与 B 等价, 记作 $A{\sim}B$;

(行/列) 等价关系的**性质**:

1. (反射性) $A \sim A$;
2. (对称性) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;
3. (传递性) 若 $A \sim B$ 且 $B \sim C$, 则 $A \sim C$.

前述对方程的操作对应于增广矩阵的操作:

$$
B \xrightarrow[r_3 \div 2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_2 - 2r_1]{\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1}} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \div (-3)]{\substack{r_3 + 5r_2 \\ r_4 - 3r_2}} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_3 \div \frac{-4}{3}]{r_4 \div 3} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_3]{} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ & & & 1 & -3 \\ & & & & 0 \end{array}\right).
$$

定义

a 非零元矩阵若满足

1. 非零行在零行的上面,
2. 非零行的首非零元所在列在上一行 (若存在的话) 的首非零元所在列的右边,

则称此矩阵为**行阶梯形矩阵**.

b 若进一步，该矩阵满足

1. 非零行的首非零元为 1,
2. 首非零元所在的列的其它元均为 0,

则称其为**行最简形矩阵**.

例子

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ & & & 1 & -3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \text{行阶梯形矩阵}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{2}{3} & 2 \\ & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ & & & 1 & -3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 - \frac{2}{3} r_3]{r_2 - \frac{1}{3} r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ & 1 & -1 & 0 & 3 \\ & & & 1 & -3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \text{行最简形}$$

若对矩阵进一步作初等列变换，则可以得到更简单的矩阵:

$$\xrightarrow[c_3+c_1]{c_5-4c_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\ &1&-1&0&3\\ &&&1&-3\\ &&&&0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+c_2]{c_5-3c_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\ &1&0&0&0\\ &&&1&-3\\ &&&&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_5+3c_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\ &1&0&0&0\\ &&&1&0\\ &&&&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3\leftrightarrow c_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

特点: 左上角为某阶的单位阵，其余项为 0.
称为原矩阵的**标准形**. 它是与原矩阵等价的矩阵中形式最简单的矩阵.